Vorbereitungskurse für BSc

Lösungen
Mathematik

Test I: Elementare Algebra, Lösungen:

[1] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 3; (d) 3** (Kap. 1.2)
Berechnen und vereinfachen Sie so weit wie möglich

(a) $\dfrac{7^3 \cdot 7^2}{7^4} =$ $\boxed{\dfrac{7^{3+2}}{7^4} = \dfrac{7^5}{7^4} = 7^1 = 7}$

(b) $(5.5 - 3.5)^3 =$ $\boxed{2^3 = 8}$

(c) $\left(\dfrac{-2}{5}\right)\left(\dfrac{-2}{5}\right)\left(\dfrac{-2}{5}\right) =$ $\boxed{\dfrac{-8}{125} \quad (= -0.064)}$

(d) $\dfrac{2^{19} - 2^{17}}{2^{19} + 2^{17}} =$ $\boxed{\dfrac{2^{17}(2^2 - 1)}{2^{17}(2^2 + 1)} = \dfrac{3}{5}}$

---

[2] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2; (d) 4** (Kap. 1.2 - 1.4)

(a) Wenn $2x^2y = 5$, dann ist $4x^4y^2 =$ $\boxed{(2x^2y)^2 = 25}$

(b) 11% von 3 500 ist gleich $\boxed{3\,500 \cdot 11/100 = 3\,500 \cdot 0.11 = 385}$

(c) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$ $\boxed{\sqrt{(13+12)(13-12)} = \sqrt{25} = 5}$

(d) Formen Sie den folgenden Bruch so um, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \boxed{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}}$$

---

[3] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2** (Kap. 1.3)
Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $(x+2y)^2 =$ $\boxed{x^2 + 4xy + 4y^2}$

(b) $(2x-3y)^2 =$ $\boxed{4x^2 - 12xy + 9y^2}$

(c) $(a+b)(a-b) =$ $\boxed{a^2 - b^2}$

---

[4] **Punkte: (a) 2; (b) 3; (c) 3; (d) 4** (Kap. 1.3)
Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $5a - (3a+2b) - 2(a-3b) =$ $\boxed{5a - 3a - 2b - 2a + 6b = 4b}$

(b) $(x+2)^2 + (x-2)^2 - 2(x+2)(x-2) =$ $\boxed{[(x+2)-(x-2)]^2 = 4^2 = 16}$

(c) $(1-x)^2(1+x)^2 =$ $\boxed{[(1-x)(1+x)]^2 = (1-x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4}$

(d) $(2-a)^3 =$

$$\boxed{(2-a)^2(2-a) = (4-4a+a^2)(2-a) = 8 - 4a - 8a + 4a^2 + 2a^2 - a^3 = -a^3 + 6a^2 - 12a + 8}$$

---

[5] **Punkte: 4** (Kap. 1.2)
Das Bruttosozialpodukt (BSP) sei in einem gewissen Land im Jahre 2000 gleich 8 Milliarden Euro. Wie lässt sich das BSP nach 6 Jahren berechnen, wenn es jedes Jahr um 5% zunimmt?

BSP nach 6 Jahren: $\boxed{8(1.05)^6 \text{ Milliarden Euro}}$

---

[6] **Punkte: (a) 3; (b) 3; (c) 4** (Kap. 1.3)
Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Faktoren:

(a) $5a^2b + 15ab^2 =$ $\boxed{5ab(a+3b)}$

(b) $9 - z^2 =$ $\boxed{(3-z)(3+z)}$

(c) $p^3q - 4p^2q^2 + 4pq^3 =$ $\boxed{pq(p^2 - 4pq + 4q^2) = pq(p-2q)^2}$

---

[7] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2** (Kap. 1.4)
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem einzigen Bruch. Kürzen Sie dabei so weit wie möglich.

(a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$ $\boxed{\frac{3}{2\cdot 3} - \frac{2}{3\cdot 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}}$

(b) $\frac{6a}{5} - \frac{a}{10} + \frac{3a}{20} =$ $\boxed{\frac{4\cdot 6a}{20} - \frac{2a}{20} + \frac{3a}{20} = \frac{24a - 2a + 3a}{20} = \frac{25a}{20} = \frac{5a}{4}}$

(c) $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} =$ $\boxed{\dfrac{\frac{6}{12} - \frac{4}{12}}{\frac{3}{12} - \frac{2}{12}} = \dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{12}} = 2}$

---

[8] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2; (d) 2** (Kap. 1.4)
Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

(a) $25^{1/2} =$ $\boxed{5}$

(b) $\left(x^{1/2}y^{-1/4}\right)^4 =$ $\boxed{x^2y^{-1}}$

(c) $\sqrt[3]{27a^6} =$ $\boxed{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a^6} = 3a^2}$

(d) $p^{1/5}\left(p^{4/5} - p^{-1/5}\right) =$ $\boxed{p^{1/5}p^{4/5} - p^{1/5}p^{-1/5} = p^{1/5+4/5} - p^{1/5-1/5} = p - 1}$

---

[9] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2** (Kap. 2.1)
Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten x auf:

(a) $\frac{3}{5}x = -6$ $\quad x = \boxed{-10}$

Lösung: $\frac{3}{5}x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -30 \quad \Leftrightarrow \quad x = -10$

(b) $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x+3}$ $\quad x = \boxed{6}$

Lösung: $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x+3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3 = 3(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3 = 3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$
(Beachten Sie, dass kein Nenner 0 ist, wenn $x = 6$ ist.)

(c) $\sqrt{3-x} = 2$ $\quad x = \boxed{-1}$

Lösung: $\sqrt{3-x} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3-x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -1$. Durch Einsetzen sieht man, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

---

[10] **Punkte: (a) 2; (b) 3; (c) 3** (Kap. 1.6)
Für welche x gelten die folgenden Ungleichnungen?

(a) $-3x + 2 < 5$ $\quad \boxed{x > -1}$

Lösung: $-3x + 2 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$ (Eine Ungleichung kehrt sich um, wenn sie mit einer negativen Zahl multipliziert wird!)

(b) $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$ $\quad \boxed{-3 < x \leq 1}$

Lösung: Verwenden Sie ein Vorzeichendiagramm! Beachten Sie, dass der Bruch nicht definiert ist, wenn $x = -3$ ist.

(c) $x^3 < x$ $\quad \boxed{x < -1 \text{ oder } 0 < x < 1}$

Lösung: $x^3 < x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) < 0$. Verwenden Sie dann ein Vorzeichendiagramm.

---

[11] **Punkte: (a) 3; (b) 3; (c) 3** (Kap. 2.3)
Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $3x - 9x^2 = 0$ $x =$ $\boxed{0 \quad \text{oder} \quad 1/3}$

Lösung: $3x - 9x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow 3x(1-3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ oder $x = 1/3$

(b) $x^2 - 2x - 15 = 0$ $x =$ $\boxed{-3 \quad \text{oder} \quad 5}$

(c) $2P^2 = 2 - 3P$ $P =$ $\boxed{-2 \quad \text{oder} \quad 1/2}$

---

[12] **Punkte: (a) 3; (b) 4; (c) 4** (Kap. 2.4)
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$ $\boxed{x = 3 \qquad y = 1}$

(b) $$\begin{aligned} 1.5p - 0.5q &= 14 \\ 2.5p + 1.5q &= 28 \end{aligned}$$ $\boxed{p = 10 \qquad q = 2}$

(c) $$\begin{aligned} \frac{3}{p} + \frac{3}{q} &= 3 \\ \frac{3}{p} - \frac{1}{q} &= 7 \end{aligned}$$ $\boxed{p = 1/2 \qquad q = -1}$

Lösung: Setzen Sie $x = 1/p$ und $y = 1/q$. Dann ist $3x + 3y = 3$ und $3x - y = 7$ mit der Lösung $x = 2$ und $y = -1$. Damit ist dann $p = 1/2$ und $q = -1$.
